Scales of Banach Spaces, Theory of Interpolation and their Applications

To Natalia

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU ŚLĄSKIEGO W KATOWICACH

NR 2957

Łukasz Dawidowski

Scales of Banach Spaces, Theory of Interpolation and their Applications

Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego Katowice 2012

Redaktor serii: Matematyka
Tomasz Dłotko

Recenzent
Paweł Strzelecki

Publikacja będzie dostępna – po wyczerpaniu nakładu – w wersji internetowej

Śląska Biblioteka Cyfrowa
www.sbc.org.pl

Contents

Preface

The task of this book is to present the theory of the scales of Banach spaces and the role they play in the modern theory of Partial Differential Equations. Some parts of the theory of interpolation are analysed here too. The book gathers the results of previous investigations on this subject, completed with the new ones.

The present study is directed to the mathematics students finishing already their university career, mathematicians and other people interested in mathematical science. To understand it, the basic knowledge from the fields such as a course on functional analysis containing the basics of Sobolev spaces and integral calculus in Banach spaces are required. Every reader should also be familiar with the theory of distributions and the Fourier transform, but the elementary theorems related to both of them can be found in Appendix A.

The book is divided into three parts. The first one introduces the reader into the theory of the interpolation spaces, gives its brief description and presents the basic properties of interpolation spaces.

As the precursors of the theory of interpolation we can consider M. Riesz and O. Thorin, who in the thirties proved the theorem of the interpolation of the spaces $L^p(\Omega)$. In 1939 the generalization of these results was published by J. Marcinkiewicz. After the Second World War the theory was investigated by i.a. A. Zygmund, A.P. Calderón, E. Gagliardo and J.L. Lions along with J. Petree, who perceived the interpolation spaces as traces for variants of Sobolev spaces. The more complete description of the theory of interpolation spaces can be found i.a. in the monographs of H. Triebel, L. Tartar and A. Lunardi.

The aim of the second, main part of the book, is to present the construction of the scale of the Banach spaces, generated by such an operator $A\colon D(A) \subseteq X \to X$ of the type (ω, M) that $0 \in \rho(A)$. In this part we can find the description which contains the characterization of the scale of Banach spaces and the scale of dual spaces.

The object of the last part is to show the applications of the theory given before in specific problems. We introduce the class of sectorial operators, which were widely considered i.a. by T. Kato, H. Tanabe and D. Henry, H. Amann, A. Lunardi. The connection of this class with the operators of the type (ω, M) is analysed here too. It is also possible to find in this part some properties of the scale of Banach spaces, defined for sectorial operators. Finally, we deal with the investigation of the existence and smoothness of the solutions of some Cauchy's problems, considered on different spaces on the scale of Banach spaces.

The structure of the book is as follows:

Chapter 1: introduces the definition of fractional powers of operator and describes their basic properties.

Chapter 2: first deals with the spaces D_p^σ and describes their properties and shows that they coincide with some interpolation spaces. Next, the classical approach to the theory of interpolation spaces is given and different methods of introducing these interpolation spaces, e.g. K-method and trace method of real interpolation and complex method of interpolation are presented. In this chapter can also be found the definition of the operator of the type $(\omega, M(\theta))$.

Chapter 3: this short chapter gives the characterization of the domains of fractional powers of operator through infinitesimal generators of bounded semi-groups or bounded analytic semi-groups.

Chapter 4: this crucial chapter contains two sections. The first one considers inductive limits and projective limits of sequences of Banach spaces and their properties. The second one shows construction of the scale of Banach spaces for the linear operator of the type $(\omega, M(\theta))$, which resolvent set contains 0. Next the characterization of the scale of Banach spaces is discussed.

Chapter 5: the aim of this chapter is to introduce a few examples of the scales of the Banach spaces. One of the examples leads to definition of the fractional Sobolev spaces, which are useful spaces considered in the theory of Partial Differential Equations.

Chapter 6: presents sectorial operators, describes their properties and gives some basic examples of such operators.

Chapter 7: is devoted to some applications of the theories given before. At the beginning we consider the operators defined on different levels of the scale, that is to say for the operator $A\colon D(A) \subseteq X \to X$ we consider its restrictions or extensions $A|_{X^z}$ for the spaces in the scale $(X^z)_{z\in\mathbb{R}}$, generated by this operator. We show that if the operator A is closed or sectorial then all the operators $A|_{X^z}$ are also closed or sectorial. Next we present the theorem which shows that under certain assumptions the scales of the Banach spaces can be achieved by using the method of complex interpolation spaces. Finally we will give the examples that justify the consideration of the spaces with fractional exponents on the scale.

Chapter 8: deals with the Cauchy's problem

$$\begin{cases} u_t + Au = F(u), & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

We consider the local X^z-solutions as well as their existence and uniqueness. Next we reveal a few examples of Cauchy's problems for which we search the local X^z-solutions.

Appendix A: contains basic facts referring to the theory of distributions and Fourier transform.

Acknowledgments. I would like to express my deepest gratitude to Professor Tomasz Dłotko for his patience, help, the time spent correcting this book and the inspiration he gave me when I was writing it. I sincerely appreciate the comments on my work made by the listeners of the Seminar of the Department of Differential Equations. I am also greatly indebted to Professor Paweł Strzelecki whose valuable remarks significantly improved the manuscript. Finally, I am grateful to the Institute of Mathematics at the University of Silesia for the financial support.

Lastly, but above all, I thank my wife for her patience, support and help.

Łukasz Dawidowski

Skale przestrzeni Banacha, teoria interpolacji wraz z zastosowaniami

S t r e s z c z e n i e

Celem niniejszej monografii jest omówienie teorii skal przestrzeni Banacha oraz teorii interpolacji wraz z podaniem przykładów ich zastosowań. Praca składa się z trzech części: dwie pierwsze opisują teorię zastosowaną następnie w części trzeciej, w której zanalizowane są przykłady jej użycia.

W pierwszej kolejności opisano teoretyczne podstawy teorii interpolacji. Podano definicje oraz podstawowe twierdzenia dotyczące konstrukcji przestrzeni interpolacyjnych (interpolacja rzeczywista i zespolona).

Druga, główna, część monografii przedstawia definicję potęg ułamkowych operatorów, w szczególności dodatnich operatorów sektorialnych. Zaprezentowano także ich zastosowanie do konstrukcji skal przestrzeni Banacha, które jako główny obiekt badań są przykładem przestrzeni interpolacyjnych. W pracy zamieszczono również charakteryzację skal przestrzeni Banacha, która służy jako podstawa teoretyczna do opisu zastosowań tej teorii.

W trzeciej części omówiono zastosowanie podanej wcześniej teorii do badania „zachowań” operatorów na różnych poziomach skali. Udowodniono twierdzenia dotyczące operatorów domkniętych oraz operatorów sektorialnych. Gwarantują one, pod pewnymi założeniami, posiadanie tych właściwości przez operatory rozważane na dowolnych poziomach skali. Następnie opisano konkretne równania cząstkowe, w rozwiązywaniu których można zastosować wspomnianą teorię. Podane przykłady dotyczą szukania rozwiązań o większej regularności pewnych równań drugiego rzędu z warunkami brzegowymi typu Dirichleta oraz rozwiązywania nieliniowego równania Laplace'a na podstawie teorii Henry'ego, która dotyczy równań z nieliniowością spełniającą warunek Lipschitza na podzbiorach ograniczonych.

Лукаш Давидовски

Шкала Банахових пространств. Теория интерполяции и ее применение

Р е з ю м е

Целью настоящей монографии являеця рассмотрение теории шкалы банаховых пространств, а также теории интерполяции наряду с приведиением примеров их использования. Работа состоит из трех частей: две первые из них описывают теорию, востребованную затем в третьей части, в которой анализируюця примеры ее применения.

В первую очередь описываюця теоретические основания теории интерполяции. Приводяця дефиниции, а также основные утверждения, касающиеся конструкции интерполяционново пространства (рациональная и комплексная интерполяция).

Во второй, главной части монографии, представлена дефиниция дробных степеней операторов, в особенности положительных секториальных операторов. Показано также их применение в области конструкции шкалы банаховых пространств, которые в качестве главного предмета исследований являюця иллюстрацией интерполяционных пространств. Кроме того, в работе дана характеристика шкалы банаховых пространств, котороя служит теоретическим основанием для описания использования ѐтой теории.

Третья часть проецирует представленную теорию на исследование «поведения» операторов на разных уровнях шкалы. Доказаны теоремы, касающиеся замкнутых и секториальных операторов. Они гарантируют, с определенными оговорками, наличие особенностей операторов на любых уровнях шкалы. Далее описаны конкретные частичные уравнения, при решении которых можно использовать упомянутую теорию. Приведенные примеры касаюця поиска решений с большей регулярностью отдельных уравнений второго порядка с граничными условиями типа Дирихле, а также решений ислинейного уравнения Лапласа на основании теории Генри, которая касаеця уравнений с нелинейностью, выполняющей условие Липшица на ограниченных подсистемах.

Redaktor: Barbara Todos-Burny

Projektant okładki: Beata Łojan

Redaktor techniczny: Barbara Arenhövel

Skład i łamanie: Łukasz Dawidowski, Beata Łojan

ISSN 0208-6336
ISBN 978-83-226-2112-7

Wydawca
Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego
ul. Bankowa 12B, 40-007 Katowice
www.wydawnictwo.us.edu.pl
e-mail: wydawus@us.edu.pl

Wydanie I. Ark. druk. 6,75. Ark. wyd. 7,0
Papier offset. kl. III 90 g Cena 10 zł (+VAT)

Druk i oprawa: PPHU TOTEM s.c.
M. Rejnowski, J. Zamiara
ul. Jacewska 89, 88-100 Inowrocław